

# Relativistische Kinematik - Formelsammlung

bearbeitet von Patrick Reichart  
Physik Department E12, TU-München  
letzte Überarbeitung: 10. Dezember 1996

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>1</b>
1.1	Nomenklatur . . . . .	1
1.2	Einstein . . . . .	2
1.3	Vierervektoren . . . . .	2
1.4	Lorentz-Transformationen . . . . .	3
1.5	Streugeometrie . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Kinetische Energien im CM-System</b>	<b>3</b>
2.1	Gesamtenergie $E$ im CM-System . . . . .	3
2.2	Kinetische Energien im CM-System vor dem Stoß . . . . .	4
2.3	Q-Wert . . . . .	5
2.4	Kinetische Energien im CM-System nach dem Stoß . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Streuwinkel</b>	<b>6</b>
3.1	Geschwindigkeit des Schwerpunkts . . . . .	6
3.2	Impulstransformation CM $\rightarrow$ Laborsystem . . . . .	6
3.3	Streuwinkeltransformation CM $\rightarrow$ Laborsystem . . . . .	7
3.4	Streuwinkeltransformation Labor $\rightarrow$ CM-System . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Kinetische Energien im Laborsystem</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Raumwinkelbeziehung</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Geschwindigkeitsaddition</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Rapidität</b>	<b>10</b>

## 1 Vorbemerkungen

### 1.1 Nomenklatur

Dreiervektoren werden in Fettschrift formatiert, Vierervektoren erhalten einen Hut (z. B.  $\hat{a}$ ). Größen im Schwerpunktsystem sind mit dem Index  $cm$  ("center of mass")

gekennzeichnet, während Größen ohne Index auf das Laborsystem hindeuten bzw. allgemein gelten.

Für die Massen sind immer die Ruhemassen einzusetzen. Bewegte Massen werden im Bedarfsfall eindeutig gekennzeichnet (z. B.  $M(v)$ ).

$E$  bezeichnet immer die Gesamtenergie des Teilchens oder Systems. Mit  $T$  ist wie allgemein üblich die kinetische Energie des betreffenden Teilchens gemeint.

Die Indizes 1-4 beziehen sich auf die Teilchen vor dem Stoß (1,2) bzw. nach dem Stoß (3,4).  $i$  steht für "initial", d. h. vor dem Stoß und entsprechend  $f$  für "final", also nach dem Stoß ( $i$  also bitte nicht verwechseln mit Platzhalter für 1,2,3,4).

Im Anhang in Tabelle 1 sind zum Nachschlagen alle verwendeten Größen zusammengefaßt. Außerdem befindet sich dort auch eine praktische Tabelle (Tabelle 2) zur Umrechnung wichtiger relativistischer Größen.

## 1.2 Einstein

Der *relativistische Faktor* wird definiert als

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{mit der rel. Geschwindigkeit } \beta := \frac{v}{c} \quad , \quad (1)$$

wobei  $v$  die Geschwindigkeit des Teilchens ist. Nützlich ist oft die Beziehung

$$\gamma\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad . \quad (2)$$

Bezeichnet man mit  $m$  die *Ruhemasse*, so lauten die grundlegenden Gleichungen Einsteins für den *Dreierimpuls* und die *Energie* des Teilchens

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad , \quad (3)$$

$$E = \gamma m c^2 \quad . \quad (4)$$

Daraus folgt die *Energie-Impuls-Beziehung*

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (5)$$

und

$$\beta = \frac{pc}{E} \quad . \quad (6)$$

Diese Beziehungen gelten allgemein in jedem Bezugssystem.

## 1.3 Vierervektoren

*Vierervektoren* sind definiert als

$$\hat{x} := \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad \hat{p} := \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{pc} \end{pmatrix} \quad . \quad (7)$$

Das Skalarprodukt von Vierervektoren ist

$$\hat{a}\hat{b} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := a_0 b_0 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \quad . \quad (8)$$

Das Quadrat von Vierervektoren ist *lorentz-invariant*, z. B.:

$$\hat{p}^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \stackrel{(5)}{=} m^2 c^4 \quad . \quad (9)$$

## 1.4 Lorentz-Transformationen

System  $\mathcal{S}'$  bewegt sich linear in  $x$ -Richtung mit Geschwindigkeit  $\beta$  gegenüber  $\mathcal{S}$ . Dann lautet die *Transformation* in dieses Bezugssystem

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) & E' &= \gamma(E - \beta cp_x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) & cp'_x &= \gamma(cp_x - \beta E) \\ y' &= y & cp'_y &= cp_y \\ z' &= z & cp'_z &= cp_z \end{aligned} \quad (10) \quad (11)$$

bzw. die *Rücktransformation*

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x') & E &= \gamma(E' + \beta cp'_x) \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') & cp_x &= \gamma(cp'_x + \beta E') \\ y &= y' & cp_y &= cp'_y \\ z &= z' & cp_z &= cp'_z \end{aligned} \quad (12) \quad (13)$$

Oder in Matrixschreibweise mit Vierervektoren

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}, \quad (14)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} E' \\ cp'_x \\ cp'_y \\ cp'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ cp_x \\ cp_y \\ cp_z \end{pmatrix}}. \quad (15)$$

Entsprechend die Rücktransformationen.

## 1.5 Streugeometrie

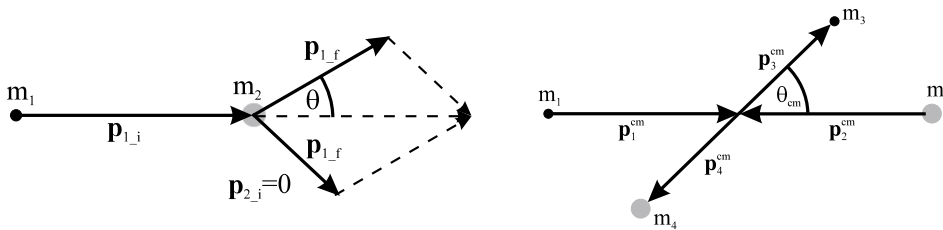


Abbildung 1: Stoß im Labor- und CM-System

## 2 Kinetische Energien im CM-System

### 2.1 Gesamtenergie $E$ im CM-System

Das CM-("Center of Mass") System ist das Bezugssystem, in dem der Gesamtschwerpunkt ruht. Hier sind die Energien und Impulse besonders einfach zu berechnen,

da

$$\mathbf{p}_1^{cm} + \mathbf{p}_2^{cm} = 0 \quad (16)$$

gilt. Das Quadrat des gesamten Viererimpulses ist daher

$$(\hat{p}_1^{cm} + \hat{p}_2^{cm})^2 = \left( \frac{E_1^{cm} + E_2^{cm}}{c(\mathbf{p}_1^{cm} + \mathbf{p}_2^{cm})} \right)^2 = (E_1^{cm} + E_2^{cm})^2 = E_{cm}^2 \quad . \quad (17)$$

Da Quadrate von Vierervektoren lorentz-invariant sind, gilt

$$E_{cm}^2 = (\hat{p}_1^{cm} + \hat{p}_2^{cm})^2 = (\hat{p}_1 + \hat{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - c^2(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \quad . \quad (18)$$

Damit erhält man die *Gesamtenergie im CM-System* in Abhängigkeit der kinetischen Energien von Strahl- und Targetteilchen:<sup>1</sup>

$$E_{cm} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - c^2(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2} \quad (19)$$

$$\text{mit} \quad \begin{array}{l} E_1 = T_1 + m_1 c^2 \\ E_2 = T_2 + m_2 c^2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} c^2 \mathbf{p}_1^2 = T_1^2 + 2T_1 m_1 c^2 \\ c^2 \mathbf{p}_2^2 = T_2^2 + 2T_2 m_2 c^2 \end{array} \quad (20)$$

(Beachte:  $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 \cos \pi = -p_1 p_2$ )

## 2.2 Kinetische Energien im CM-System vor dem Stoß

Mit (19) und (20) erhält man die gesamte kinetische Energie im CM-System vor dem Stoß

$$T_i^{cm} = E_{cm} - (m_1 + m_2)c^2 = (m_1 + m_2)c^2 \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 + \alpha}} \quad (21)$$

mit

$$\alpha = \frac{2(T_1 T_2 + T_1 m_2 c^2 + T_2 m_1 c^2 - p_1 p_2 c^2)}{(m_1 + m_2)^2 c^4} \quad (22)$$

Impulserhaltung im CM-System  $\mathbf{p}_1^{cm} = \mathbf{p}_2^{cm}$  bzw.  $(p_1^{cm})^2 = (p_2^{cm})^2$  und  $(E_{1,2}^{cm})^2 = (p_{1,2}^{cm})^2 c^2 + m_{1,2}^2 c^4$  führt zu

$$\begin{aligned} (E_1^{cm})^2 - (E_2^{cm})^2 &= m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4 \quad , \\ E_1^{cm} - E_2^{cm} &= \frac{m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{E_{cm}} \quad . \end{aligned} \quad (23)$$

<sup>1</sup> $E_{cm}$  steht im Labor für Teilchenreaktionen zur Verfügung. Falls das Target ruht ergibt sich mit  $E_2 = m_2 c^2$ ,  $p_2 = 0$ ,  $E_1 = E_{strahl}$

$$\begin{aligned} E_{cm} &= \sqrt{(E_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2} = \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^2 E_{strahl}} \\ &= \sqrt{(m_1 + m_2)^2 c^4 + 2m_2 c^2 E_{strahl}} \stackrel{E_{strahl} \gg (m_1 + m_2)c^2}{\approx} \sqrt{2m_2 c^2 E_{strahl}} \quad , \\ E_{cm} &\propto \sqrt{E_{strahl}} \end{aligned}$$

Die zur Verfügung stehende Energie geht also nur mit der Wurzel der Strahlenergie! D. h. es ist ungünstig, ein ruhendes Target zu benutzen (vgl. klassisch).

Außerdem gilt

$$T_1^{cm} = E_1^{cm} - m_1 c^2 \quad , \quad (24)$$

$$T_2^{cm} = E_2^{cm} - m_2 c^2 \quad , \quad (25)$$

$$E_{cm} = E_1^{cm} + E_2^{cm} \quad , \quad (26)$$

$$T_i^{cm} = T_1^{cm} + T_2^{cm} = E_{cm} - m_1 c^2 - m_2 c^2 \quad . \quad (27)$$

Mit (23) - (27) erhält man die Energien der einzelnen Teilchen im CM-System vor dem Stoß

$$E_1^{cm} = \frac{E_{cm}}{2} + \frac{m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2E_{cm}} \quad (28)$$

$$E_2^{cm} = \frac{E_{cm}}{2} - \frac{m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2E_{cm}} \quad (29)$$

$$T_1^{cm} = E_1^{cm} - m_1 c^2 = \frac{T_i^{cm} T_i^{cm} + 2m_2 c^2}{E_{cm}} \quad (30)$$

$$T_2^{cm} = E_2^{cm} - m_2 c^2 = \frac{T_i^{cm} T_i^{cm} + 2m_1 c^2}{E_{cm}} \quad (31)$$

### 2.3 Q-Wert

Der *Q-Wert* einer Reaktion ist definiert als

$$Q := (m_1 + m_2) - (m_3 + m_4) = T_f - T_i = T_f^{cm} - T_i^{cm} \quad . \quad (32)$$

Damit gilt

$$T_f^{cm} = T_i^{cm} + Q \quad (33)$$

### 2.4 Kinetische Energien im CM-System nach dem Stoß

Mit (32) bzw. (33) erhält man die kinetischen Energien der Teilchen im CM-System nach dem Stoß

$$T_3^{cm} = \frac{T_f^{cm}}{2} \frac{T_f^{cm} + 2m_4 c^2}{T_f^{cm} + m_3 c^2 + m_4 c^2} = \frac{T_f^{cm} T_f^{cm} + 2m_4 c^2}{2 E_{cm}} \quad (34)$$

$$T_4^{cm} = \frac{T_f^{cm}}{2} \frac{T_f^{cm} + 2m_3 c^2}{T_f^{cm} + m_3 c^2 + m_4 c^2} = \frac{T_f^{cm} T_f^{cm} + 2m_3 c^2}{2 E_{cm}} \quad (35)$$

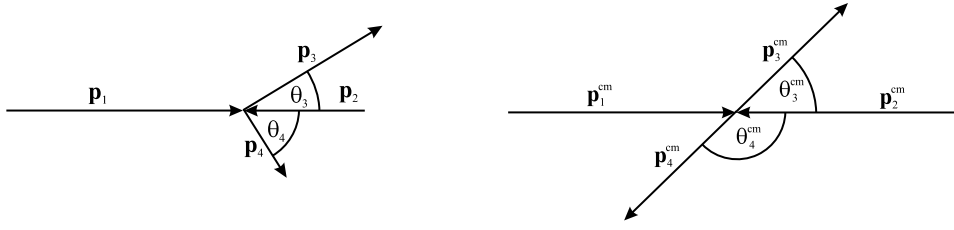


Abbildung 2: Streugeometrie Labor und CM

### 3 Streuwinkel

#### 3.1 Geschwindigkeit des Schwerpunkts

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes berechnet sich zu <sup>2</sup>

$$\beta := \beta_{SP} = c \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{E_1 + E_2} \quad (36)$$

Im folgenden sei  $\beta = \|\beta\|$ , also  $\beta = (0, 0, \beta)$ , falls der Stoß entlang der z-Achse stattfindet.

#### 3.2 Impulstransformation CM $\rightarrow$ Laborsystem

Die Impulskomponenten des ausfallenden Teilchens 3 im Laborsystem berechnen sich zu (mit z-Achse als Strahlachse)

$$p_{3,z} = \gamma \left( p_{3,z}^{cm} + \beta \frac{E_3^{cm}}{c} \right) = \gamma (p_{3,z}^{cm} + \beta m_3 c \gamma_3^{cm}) \quad (37)$$

$$p_{3,x} = p_{3,x}^{cm} \quad (\text{da } \beta_x = 0) \quad (38)$$

$$p_{3,y} = p_{3,y}^{cm} \quad (\text{da } \beta_y = 0) \quad (39)$$

wobei

$$\beta_3^{cm} := \frac{c p_3^{cm}}{E_3^{cm}} \quad (40)$$

( $p_3^{cm}$  erhält man aus der Energie-Impuls-Beziehung für Teilchen 3)

Unter Einbeziehung der Streuwinkel, wie sie in Abbildung 2 dargestellt sind, folgt im CM-System

$$p_{3,z}^{cm} = p_3^{cm} \cos \theta_3^{cm} = m_3 c \beta_3^{cm} \gamma_3^{cm} \cos \theta_3^{cm} \quad (41)$$

$$p_{3,xy}^{cm} = p_3^{cm} \sin \theta_3^{cm} = m_3 c \beta_3^{cm} \gamma_3^{cm} \sin \theta_3^{cm} \quad (42)$$

und mit (37) - (38) im Laborsystem

$$p_{3,z} = \gamma p_3^{cm} \left( \cos \theta_3^{cm} + \frac{\beta}{\beta_3^{cm}} \right) \quad (43)$$

$$p_{3,xy} = p_{3,xy}^{cm} \quad (44)$$

Dabei ist  $p_{xy}^2 = p_x^2 + p_y^2$ .

Analog für Teilchen 4.

<sup>2</sup>Es wird der Übersicht zuliebe hier kein Index verwendet.  $\beta$  wie auch  $\gamma$  beziehen sich also im folgenden auf die Schwerpunktschwindigkeit im Laborsystem (im CM-System ist diese ohnehin 0) und nicht auf die allgemeine Definition dieser Größen

### 3.3 Streuwinkeltransformation CM $\rightarrow$ Laborsystem

Aus  $\tan \theta = p_{xy}/p_z$  ergeben sich mit (43) und (44) die *Streuwinkel im Laborsystem*

$$\boxed{\tan \theta_3 = \frac{\sin \theta_3^{cm}}{\gamma \left( \cos \theta_3^{cm} + \frac{\beta}{\beta_3^{cm}} \right)}} \quad (45)$$

$$\boxed{\tan \theta_4 = \frac{\sin \theta_4^{cm}}{\gamma \left( \cos \theta_4^{cm} + \frac{\beta}{\beta_4^{cm}} \right)}} \quad (46)$$

mit

$$\theta_3^{cm} + \theta_4^{cm} = \pi \quad .$$

Dabei berechnet sich  $\beta_{3,4}^{cm}$  aus (34) und (35) zu

$$\beta_{3,4}^{cm} \stackrel{(40)}{=} \frac{\sqrt{(E_{3,4}^{cm})^2 - m_{3,4}^2 c^4}}{E_{3,4}^{cm}} = \frac{\sqrt{(T_{3,4}^{cm})^2 + 2T_{3,4}^{cm} m_{3,4} c^2}}{T_{3,4}^{cm} + m_{3,4} c^2}$$

### 3.4 Streuwinkeltransformation Labor $\rightarrow$ CM-System

Durch Umkehrung von (45) und (46) erhält man die *Streuwinkel im CM-System*

$$\boxed{\cos \theta_3^{cm} = \frac{-x_3 \gamma^2 \tan^2 \theta_3 \pm \sqrt{1 + \gamma^2 \tan^2 \theta_3 (1 - x_3^2)}}{1 + \gamma^2 \tan^2 \theta_3}} \quad \text{mit } x_3 = \frac{\beta}{\beta_3^{cm}} \quad (47)$$

$$\boxed{\cos \theta_4^{cm} = \frac{-x_4 \gamma^2 \tan^2 \theta_4 \pm \sqrt{1 + \gamma^2 \tan^2 \theta_4 (1 - x_4^2)}}{1 + \gamma^2 \tan^2 \theta_4}} \quad \text{mit } x_4 = \frac{\beta}{\beta_4^{cm}} \quad (48)$$

Bei ruhendem Target (Teilchen 2) ist im Fall elastischer Streuung  $\beta_2^{cm} = \beta_4^{cm} = \beta$  und damit  $x_4 = 1$ , also

$$\cos \theta_4^{cm} = \frac{1 - \gamma^2 \tan^2 \theta_4}{1 + \gamma^2 \tan^2 \theta_4} \quad . \quad (49)$$

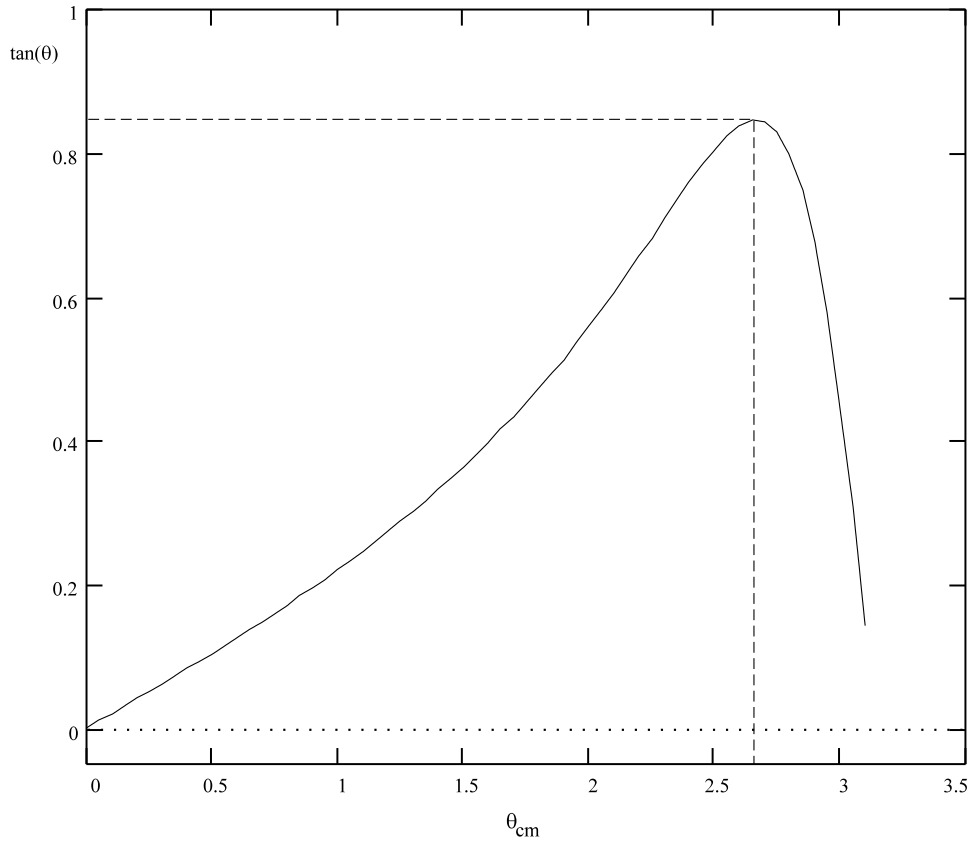
Falls  $\beta_2^{cm} < \beta$  gibt es einen *maximalen Streuwinkel* im Laborsystem. Diesen berechnet man durch differenzieren von  $\tan \theta$

$$\frac{d \tan \theta_{3,4}}{d \theta_{3,4}^{cm}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{3,4}^{cm} = \arccos \left( -\frac{\beta_{3,4}^{cm}}{\beta} \right) \quad ,$$

und damit

$$\tan \theta_{3,4}^{max} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1}{\left( \frac{\beta}{\beta_{3,4}^{cm}} \right)^2 - 1}} \quad . \quad (50)$$

Für  $\beta = 0,8$  und  $\beta_3^{cm} = 0,9$  ist in Abbildung 3 der Streuwinkel im Laborsystem in Abhängigkeit von  $\theta_{cm}$  dargestellt. Man erhält das Maximum etwa bei  $\tan \theta = 0,85$ , also  $\theta = 40^\circ$ .


 Abbildung 3: Streuwinkel im Laborsystem in Abhängigkeit von  $\theta_{cm}$ 

## 4 Kinetische Energien im Laborsystem

Die Lorentz-Trafo von  $E_3^{cm}$  in Laborsystem lautet

$$E_3 = \gamma(E_3^{cm} + \beta cp_3^{cm}) \quad \stackrel{|p_3^{cm}| = |p_4^{cm}| = p^{cm}}{\downarrow} \quad \gamma(E_3^{cm} + \beta cp^{cm} \cos \theta_3^{cm}) \quad .$$

Damit ergibt sich  $T_3$  und analog  $T_4$  zu

$$T_3 = (\gamma - 1)m_3c^2 + \gamma T_3^{cm} + \gamma \beta cp^{cm} \cos \theta_3^{cm} \quad , \quad (51)$$

$$T_4 = (\gamma - 1)m_4c^2 + \gamma T_4^{cm} + \gamma \beta cp^{cm} \cos \theta_4^{cm} \quad . \quad (52)$$

Dabei ist

$$\theta_3^{cm} + \theta_4^{cm} = \pi \quad (53)$$

und

$$cp^{cm} = \sqrt{(E_{3,4}^{cm})^2 - m_{3,4}^2 c^4} = \sqrt{T_{3,4}^{cm}(T_{3,4}^{cm} + 2m_{3,4}c^2)} \quad . \quad (54)$$

Damit erhält man also  $T_{3,4}$  als Funktion von  $\cos \theta_{3,4}^{cm}$  bzw.  $\tan \theta_{3,4}$ .



## 5 Raumwinkelbeziehung

Der Raumwinkel zwischen zwei Kegeln im Laborsystem ist

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \quad (55)$$

und im Schwerpunktsystem

$$d\Omega_{cm} = 2\pi \sin \theta_{cm} d\theta_{cm} \quad (56)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} d\Omega &= -2\pi d(\cos \theta) = -2\pi \frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \theta_{cm})} \cdot \frac{d(\cos \theta_{cm})}{d\theta_{cm}} \cdot d\theta_{cm} \\ &= 2\pi \sin \theta_{cm} d\theta_{cm} \cdot \frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \theta_{cm})} = d\Omega_{cm} \cdot \frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \theta_{cm})} \end{aligned}$$

Unter Einsetzen des unten berechneten Wertes (60) von  $\frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \theta_{cm})}$  erhält man die *Raumwinkelbeziehung* zwischen den Bezugssystemen:

$$\boxed{\frac{d\Omega}{d\Omega_{cm}} = \gamma \cdot \frac{1 + x \cos \theta_{cm}}{\sqrt{\sin^2 \theta_{cm} + \gamma^2 (\cos \theta_{cm} + x)^2}^3}} \quad (57)$$

mit

$$x = \frac{\beta}{\beta_{3,4}^{cm}} \quad (58)$$

Nun ist noch  $\frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \theta_{cm})}$  zu berechnen:

(45) bzw. (46) wird umgeformt zu

$$(1 - \cos^2 \theta) \gamma^2 (\cos \theta_{cm} + x)^2 = \sin^2 \theta_{cm} \cos^2 \theta$$

und damit

$$\cos \theta = \frac{\gamma (\cos \theta_{cm} + x)}{\sqrt{\sin^2 \theta_{cm} + \gamma^2 (\cos \theta_{cm} + x)^2}} \quad (59)$$

Ableiten nach  $\cos \theta_{cm}$  ergibt

$$\frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \theta_{cm})} = \dots = \gamma \cdot \frac{1 + x \cos \theta_{cm}}{\sqrt{\sin^2 \theta_{cm} + \gamma^2 (\cos \theta_{cm} + x)^2}^3} \quad (60)$$

## 6 Geschwindigkeitsaddition

$\mathcal{S}'$  bewege sich mit der Geschwindigkeit  $\beta = (0, 0, \beta)$  gegenüber  $\mathcal{S}$ . Dann lautet der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeitskomponenten  $v'_x, v'_y, v'_z$  und  $v_x, v_y, v_z$  eines Projektils (s. [Ma80]):

$$\boxed{\begin{aligned} v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz' + \beta c dt'}{dt' + \frac{\beta}{c} dz'} = \frac{v'_z + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c} v'_z} \\ v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + \beta c}{\gamma (1 + \frac{\beta}{c} v'_z)} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{v'_y + \beta c}{\gamma (1 + \frac{\beta}{c} v'_z)} \end{aligned}} \quad (61)$$

(Die inversen Formeln analog mit umgekehrtem Vorzeichen)

Diese Formeln sind recht unhandlich bei der Transformation von Geschwindigkeitsverteilungen vom CM- ins Laborsystem. Die folgende Definition bietet hier einen entscheidenden Vorteil.

## 7 Rapidity

Wählt man die Strahlachse als  $z$ -Achse, so wird die *Rapidity*  $y$  definiert als

$$y := \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z c}{E - p_z c} \right) = \text{Artanh} \frac{p_z c}{E} . \quad (62)$$

Äquivalent dazu ist

$$y = \ln \left( \frac{E + p_z c}{m_T c^2} \right) \quad \text{wobei} \quad (m_T c^2)^2 := (m c^2)^2 + (p_x c)^2 + (p_y c)^2 . \quad (63)$$

$m_T$  wird als *transversale Masse* bezeichnet.

Damit können Energie und Impuls auch geschrieben werden als

$$E = m_T c^2 \cosh y \quad , \quad p_z c = m_T c^2 \sinh y \quad , \quad p_x c \quad , \quad p_y c . \quad (64)$$

Für die Transformation der Rapidity von einem Bezugssystem  $\mathcal{S}$  nach  $\mathcal{S}'$  ergibt sich

$$\begin{aligned} y' &= \text{Artanh} \frac{p'_z c}{E'} \\ &= \text{Artanh} \frac{\gamma(p_z c - \beta E)}{\gamma(E - \beta p_z c)} \\ &= \text{Artanh} \frac{\frac{p_z c}{E} - \beta}{1 - \frac{p_z c}{E} \beta} \\ &= \text{Artanh} \frac{p_z c}{E} - \text{Artanh} \beta . \end{aligned}$$

Damit transformiert sich die Rapidity

$$y \longrightarrow y - \text{Artanh} \beta . \quad (65)$$

Also sind Verteilungen der Rapidity  $\frac{dN}{dy}$  invariant gegenüber Transformation. Dies bietet eine entscheidende Erleichterung bei der Arbeit mit CM- und Laborsystem.

### Zusatzbemerkung

Schreibt man

$$\begin{aligned} \frac{E + p_z c}{E - p_z c} &= \frac{\frac{E}{p_z c} + 1}{\frac{E}{p_z c} - 1} = \frac{\sqrt{\frac{2c^2 + m^2 c^4}{p_z^2 c^2}} + 1}{\sqrt{\frac{2c^2 + m^2 c^4}{p_z^2 c^2}} - 1} = \frac{\sqrt{\frac{2c^2 \sin^2 \theta + 2c^2 \cos^2 \theta + m^2 c^4}{2c^2 \cos^2 \theta}} + 1}{\sqrt{\frac{2c^2 \sin^2 \theta + 2c^2 \cos^2 \theta + m^2 c^4}{2c^2 \cos^2 \theta}} - 1} \\ &= \dots = \frac{\sqrt{1 + \frac{m^2 c^4}{2c^2}} + \cos \theta}{\sqrt{1 + \frac{m^2 c^4}{2c^2}} - \cos \theta} , \end{aligned}$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen Flugbahn und Strahlrichtung ist, so kann  $y$  entwickelt werden zu

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{mc^2}{c} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \left( \frac{mc^2}{c} \right)^4 \right)}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{mc^2}{c} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \left( \frac{mc^2}{c} \right)^4 \right)} \quad (66)$$

Falls  $pc \gg mc^2$ , also  $E \approx pc$ , so ist

$$\boxed{y \approx \eta := -\ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right)} \quad (67)$$

$\eta$  wird *Pseudorapidität* genannt und kann bestimmt werden, auch wenn Masse und Impuls der Partikel unbekannt sind.

Es gelten folgende Identitäten (s. [PR94]):

$$\begin{aligned} \sinh \eta &= \cot \theta \\ \cosh \eta &= \frac{1}{\sin \theta} \\ \tanh \eta &= \cos \theta \end{aligned} \quad (68)$$

## Literatur

[Ma80] P. Marmier. Kernphysik I - Anhang. vdf, Zürich (1980)

[PR94] Phys. Rev. D50, 1290 (1994)

Tabelle 1: zur Nomenklatur

Bezeichnung	Größe
$\gamma$ $\beta$	rel. Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ allgemein: rel. Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$ hier: rel. Geschwindigkeit des Schwerpunkts im Laborsystem
$m$ $E$ $T$ $\mathbf{p}, \hat{\mathbf{p}}$	Ruhemasse Gesamtenergie kinetische Energie Dreier-, Viererimpuls
$E_{cm}$ $T_f, T_i, T_f^{cm}, T_i^{cm}$ $Q$	Gesamtenergie im CM-System (vor und nach Stoß!) kin. Energien nach bzw. vor dem Stoß im Labor- und CM-System Q-Wert der Reaktion $Q = T_f - T_i$
$\beta_1, \beta_2, \beta_1^{cm}, \beta_2^{cm}$ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^{cm}, \gamma_2^{cm}$ $m_1, m_2$ $E_1, E_2, T_1, T_2$ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2$ $E_1^{cm}, E_2^{cm}, T_1^{cm}, T_2^{cm}$ $\mathbf{p}_1^{cm}, \mathbf{p}_2^{cm}, \hat{\mathbf{p}}_1^{cm}, \hat{\mathbf{p}}_2^{cm}$	rel. Geschwindigkeiten der Teilchen vor dem Stoß in Labor- bzw. CM-System rel. Faktoren der Teilchen vor dem Stoß in Labor- bzw. CM-System Ruhemassen der Teilchen vor dem Stoß Energien vor dem Stoß im Laborsystem Impulse vor dem Stoß im Laborsystem Impulse/Energien vor dem Stoß im CM-System Impulse vor dem Stoß im CM-System
$\beta_3, \beta_4, \beta_3^{cm}, \beta_4^{cm}$ $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_3^{cm}, \gamma_4^{cm}$ $m_3, m_4$ $E_3, E_4, T_3, T_4$ $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \hat{\mathbf{p}}_3, \hat{\mathbf{p}}_4$ $E_3^{cm}, E_4^{cm}, T_3^{cm}, T_4^{cm}$ $\mathbf{p}_3^{cm}, \mathbf{p}_4^{cm}, \hat{\mathbf{p}}_3^{cm}, \hat{\mathbf{p}}_4^{cm}$	rel. Geschwindigkeiten der Teilchen nach dem Stoß in Labor- bzw. CM-System rel. Faktoren der Teilchen nach dem Stoß in Labor- bzw. CM-System Ruhemassen der Teilchen nach dem Stoß Energien nach dem Stoß im Laborsystem Impulse nach dem Stoß im Laborsystem Impulse/Energien nach dem Stoß im CM-System Impulse nach dem Stoß im CM-System
$p_z$ $p_x, p_y$ $p_{xy}$	Impulskomponente parallel zur Strahlachse Impulskomponenten senkrecht zur Strahlachse gesamte Impulskomponente senkrecht zur Strahlachse
$v_z$ $v_x, v_y$	Geschwindigkeitskomponente parallel zur Strahlachse Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Strahlachse
$\theta$ $\theta_3, \theta_4$ $\theta_3^{cm}, \theta_4^{cm}$	Streuwinkel (s. Abbildung 2) Streuwinkel der einzelnen Teilchen im Laborsystem Streuwinkel der einzelnen Teilchen im CM-System
$\Omega, \Omega_{cm}$	Raumwinkel im Laborsystem bzw. Schwerpunktsystem
$y, \eta$ $m_T$	Rapidity und Pseudorapidity transversale Masse

Tabelle 2: Umrechnung von Energie, Impuls und Geschwindigkeit

	$\beta = \frac{v}{c}$	$\gamma$	$\tau = \frac{T}{mc^2}$	$\pi = \frac{pc}{mc^2}$
$\beta = \frac{v}{c}$	1	$\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$	$\frac{\sqrt{\tau^2 + 2\tau}}{1 + \tau}$	$\frac{\pi}{\sqrt{1 + \pi^2}}$
$\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	1	$1 + \tau$	$\sqrt{1 + \pi^2}$
$\tau = \frac{T}{mc^2}$	$\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \beta^2}}$	$\gamma - 1$	1	$\frac{\pi^2}{1 + \sqrt{1 + \pi^2}}$
$\pi = \frac{pc}{mc^2}$	$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	$\sqrt{\gamma^2 - 1}$	$\sqrt{\tau^2 + 2\tau}$	1